

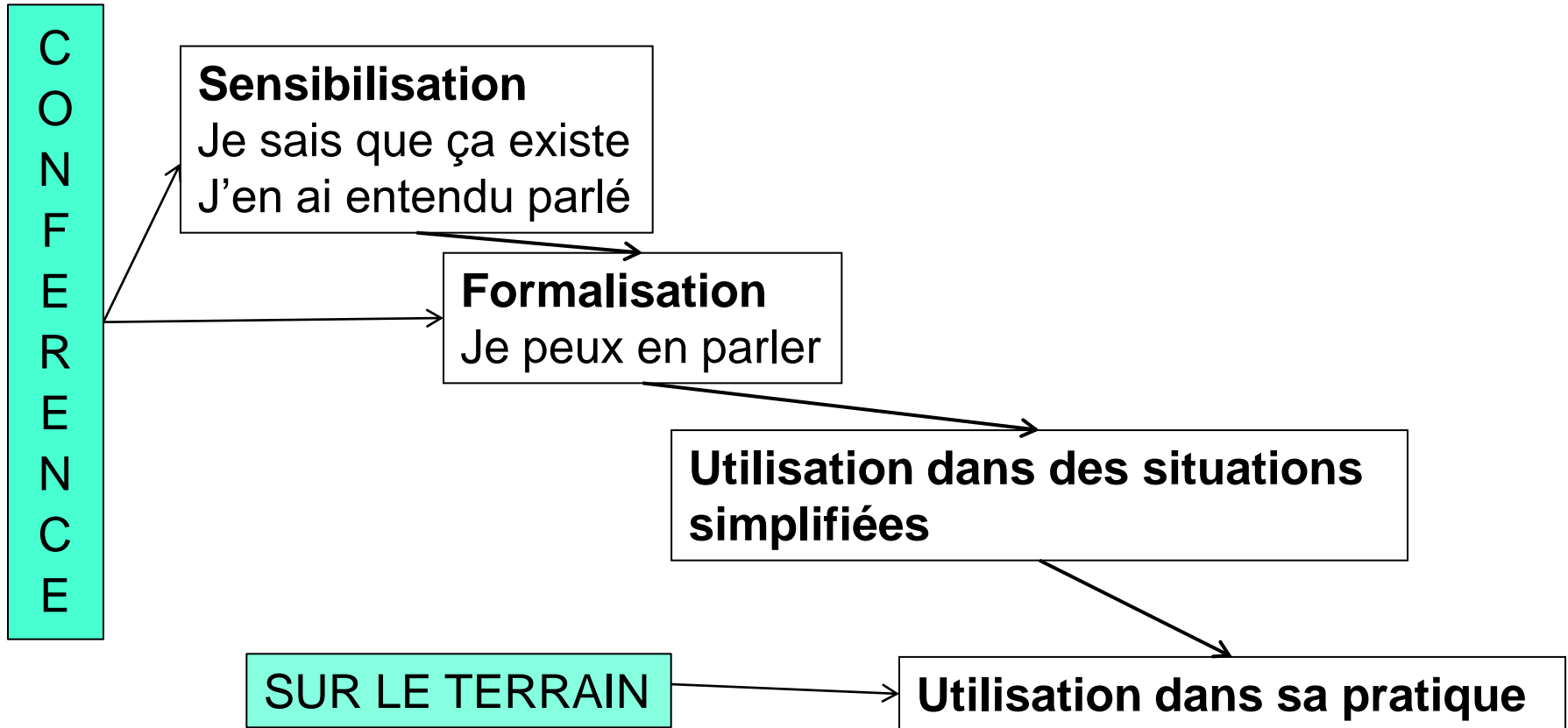
**Erreurs et difficultés des élèves dans le cadre
de la résolution de problèmes.
Dispositifs d'aide**

Strasbourg 26/01/11

M. MANTE

Une formation d'enseignant vise à faire acquérir à la fois des gestes professionnels et des outils d'analyse.

Ces acquisitions passent par les phases suivantes :



A noter que sur le terrain il y a deux niveaux d'acquisition des outils d'analyse :

- Je sais utiliser les outils d'analyse après coup (sur l'action).
- Je sais utiliser les outils d'analyse dans l'action.

Erreurs et difficultés des élèves dans le cadre de la résolution de problèmes.

Dispositifs d'aide

1er temps : Définition d'un problème « scolaire »

2ème temps : Pourquoi des problèmes dans l'enseignement ?

3ème temps : Comment fait – on pour résoudre un problème ?

4ème temps : Analyse des erreurs et difficultés des élèves et pistes d'aide.

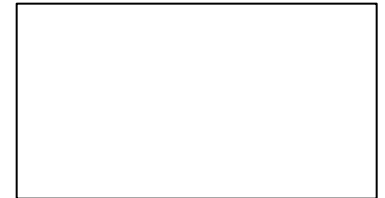
5ème temps : Pistes de travail

Méthode de travail

Des moments de mise en situation



Des moments d'apports de connaissances



1er temps : Définition d'un problème « scolaire »



1^{ère} phase : Compléter la définition : « pour moi un problème c'est ... ».

2^{ème} phase : Les activités suivantes sont-elles des problèmes (Voir document distribué).

3e phase : Synthèse

Nous appellerons problème (dans l'enseignement) toute activité proposée à l'élève constituée de **données**, de **contraintes** (éventuelles) et **d'un but à atteindre**. Pour atteindre ce but, l'élève doit mettre en place une suite d'opérations ou d'actions (qu'on appellera « procédure ») qui ne sont pas immédiatement disponibles pour lui.

Conséquences :

- Ainsi une activité peut être un problème pour un élève et ne pas l'être pour un autre.
- Elle peut également, pour le même élève, être un problème à un moment donné et ne plus l'être quelques temps plus tard.

En ce sens un problème est différent d'un exercice d'application qui est une activité pour laquelle l'élève a une procédure immédiate de résolution soit parce que l'activité lui est très familière soit parce que l'énoncé ou le contexte induit la procédure.

2ème temps : Pourquoi des problèmes dans l'enseignement ?



Un état des lieux : Prendre un instant pour répondre aux questions :

Proposez – vous des pb à vos élèves ? Pourquoi ?

Si vous en proposez quelles difficultés rencontrez – vous ?

Pourquoi des problèmes dans l'enseignement des mathématiques ?

- **Pour des raisons épistémologiques** : *Faire des mathématiques c'est se poser et résoudre des problèmes.*

- **Pour des raisons sociales** : *Pourquoi enseigner les mathématiques ?*

- *utiles dans la vie de tous les jours ?*

- ***utiles pour développer des stratégies de recherche qui sont transférables***

- **Pour des raisons pédagogiques** :

- *Pour comprendre un concept*

- *Pour faciliter les apprentissages dans l'approche socio – constructiviste*

- **Pour des raisons institutionnelles** :

- *Cf. programmes et socle*

Conclusion : Les problèmes sont indispensables dans l'enseignement des mathématiques

Objectif que l'on peut viser en proposant des problèmes en classe ?

- **Construire une connaissance nouvelle** : situation– pb ou Pb « complexe ».
- Utiliser une connaissance dans des situations nouvelles :
 - **Problème de transfert** : utiliser une connaissance dans un contexte nouveau.
 - **Problème de synthèse** : utiliser une connaissance nouvelle avec d'anciennes connaissances.
- **Apprendre à chercher** : mettre en route des stratégies de recherche spécifiques entre autres la « démarche scientifique » avec les pb ouverts.

Remarque : Avec un même problème on peut viser des objectifs différents suivant le moment où il est proposé.

3^{ème} temps : Comment fait – on pour résoudre un problème ?



Que faut – il faire pour répondre à chacune de ces questions ?

1 - J'achète 2,5 kg de pommes de terre à 0,75 € le kilo. Quel prix vais – je payer ?

2 – J'achète 3,7 kg d'oranges et je paie 4,44 €. Quel est le prix d'un kilo d'oranges ?

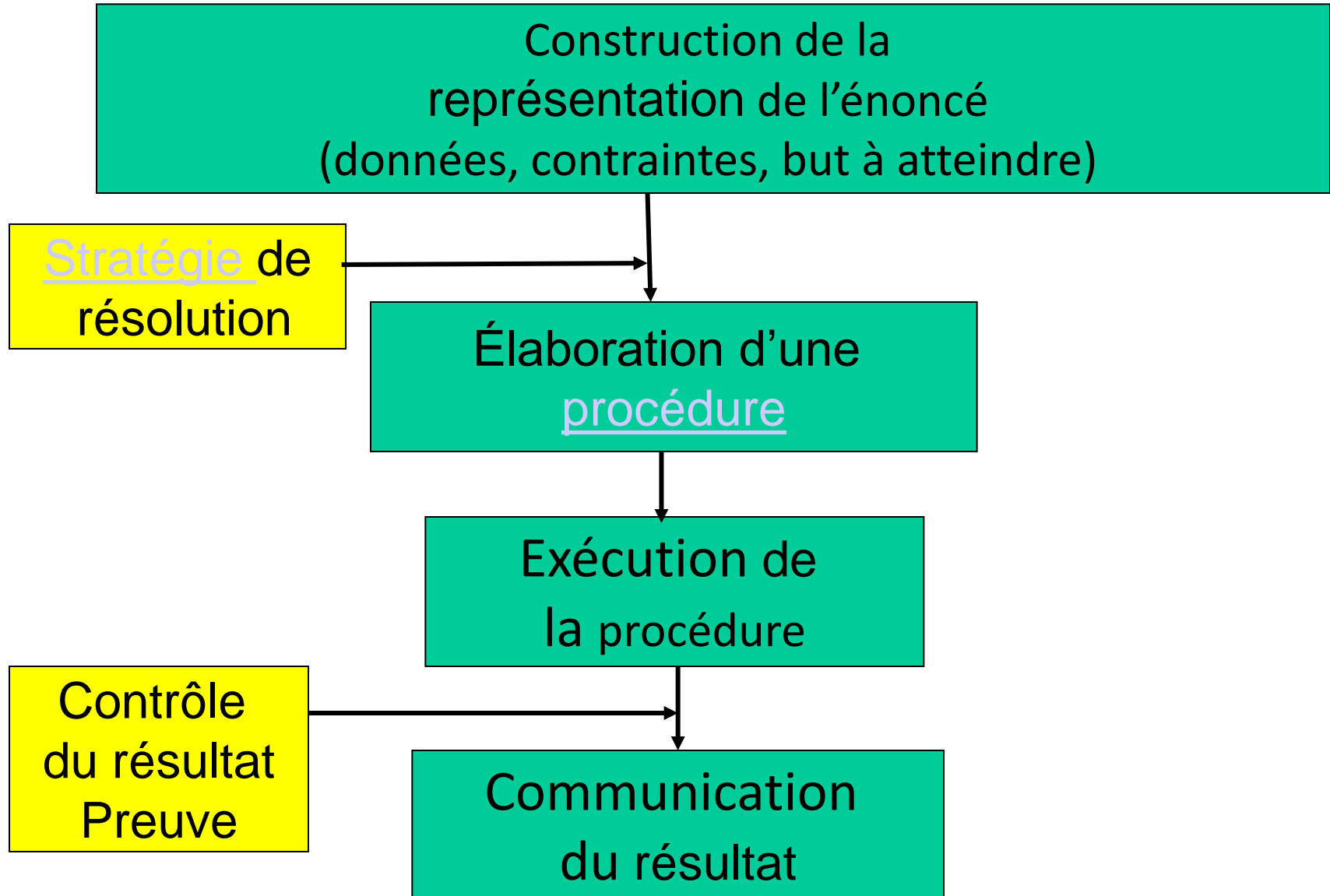
3 – J'ai trois pantalons , deux chemises et trois paires de chaussures . De combien de façons différentes puis – je m'habiller ?

Schéma général de procédure : ce sont des procédures qu'on utilise de façon quasi automatique pour résoudre une classe de « problèmes ».



Résoudre le problème qui vous est proposé (Voir document).

Recherche d'un problème



Attention ! Schéma réducteur

Construction de la représentation de l'énoncé (données, contraintes, but à atteindre)

Comment se fait cette
construction ?

En sélectionnant des indices (numériques et non numériques) qui sont stockés en mémoire de travail (MT) en fonction d'une anticipation que le sujet fait sur le sens du texte. Cette anticipation est fonction des expériences du lecteur, stockées dans la mémoire à long terme (MLT).

Expériences sociales

Expériences
scolaires

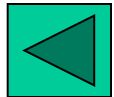
Problèmes déjà
résolus

Schéma généraux
de procédure

Règles du contrat
didactique



Procédure : Succession d'opérations définie pour un dispositif et une tâche donnés dont l'exécution a pour objectif de faire passer d'un état initial à un état final.



Stratégie de recherche : Processus que l'on met en place, consciemment ou non pour passer de la représentation de l'énoncé à la procédure

Chaînage avant : Il consiste à tirer des conséquences (effectives ou potentielles) des données. Puis avec ces conséquences et de nouvelles données à en tirer de nouvelles conséquences, . . . Pour cela on s'appuie sur des schémas généraux de procédures.

Avantage : Aide à la construction de la représentation du problème en donnant du sens aux données et peut diminuer le nombre d'informations stockées en MT.

Inconvénients : Ne prend pas en compte le but à atteindre. Souvent le nombre de conséquences qu'on peut tirer des données est considérable.

Chaînage arrière : Il consiste à s'interroger sur les connaissances qu'il faudrait avoir pour atteindre le but de l'énoncé. Puis à continuer ainsi jusqu'à aboutir aux données : « Pour calculer le nombre de . . . il faudrait que je connaisse . . .
Pour cela il faudrait que je connaisse . . . »

Avantage : Prend en compte le but à atteindre

Inconvénients : Peut vite conduire à une surcharge cognitive.

Pour un but donné il peut, parfois, y avoir de multiples pistes pour l'atteindre.



Chaînage mixte

D'autres stratégies:

- La démarche scientifique : Essayer, conjecturer, tester, prouver (Pb ouvert).
- L'étude systématique des cas
- La schématisation
- Le changement de cadre
- L'analogie
-

4ème temps : Analyse des erreurs et difficultés des élèves et pistes d'aide.



Analyser les erreurs des élèves (voir documents)

Construction de la représentation de l'énoncé (données, contraintes, but à atteindre)

Constat : L'élève ne comprend pas l'énoncé, ou le comprend mal (représentation incomplète ou inadaptée).

Origine :

- l'élève ne connaît pas certains mots de l'énoncé ou fait un contresens concernant certains d'entre eux.
- Le contexte social du problème (s'il s'agit d'un problème « concret ») ne lui est pas familier (ou même inconnu) ou trop familier (dans ce cas il peut rajouter des informations ou les modifier).
- Dans le cas d'un problème concret, la solution attendue n'est pas la solution pratique
- Il existe des implicites dans l'énoncé.
- Il y a de très nombreuses informations que l'élève n'arrive pas à stocker ou à sélectionner (surcharge cognitive).

Pistes d'aide :

- Les quatre premiers points ne doivent pas être une difficulté pour l'élève. **Ce n'est pas à travers les problèmes scolaires que les élèves doivent se familiariser avec un contexte concret.** → Familiarisation possible avec le contexte ou changer de contexte + Explicitation des mots inconnus + Suppression des implicites (dans la mesure du possible)
- Si la solution attendue n'est pas cohérente avec la solution pratique il faut abandonner l'énoncé.
- Aide à la schématisation + Aide à la mise en place du chaînage mixte.

Stratégie de résolution

On se place dans le cas où la stratégie adaptée est le chaînage mixte

Constat : L'élève met en place des stratégies inappropriées :

- Stratégie « contrat didactique » : Pour résoudre un problème on utilise les dernières notions étudiées avec les nombres de l'énoncé.
- Stratégie « mots inducteurs » : S'il y a « plus » entre deux nombres je les additionne, . . .
- Stratégie « Extraire – regrouper – opérer » :



Origine :

- Stratégie économiques
- Si l'enseignant n'est pas vigilant ces stratégies peuvent conduire à la bonne procédure, ce qui les renforce dans l'esprit des élèves.

Pistes d'aide : Amener l'élève à abandonner ces stratégies en proposant des problèmes pour lesquels elles mènent à des erreurs (ex : Pb de l'âge du capitaine, Pb impossible, Pb avec mots inducteurs trompeurs, pb avec des données qui n'apparaissent pas dans l'ordre de leur utilisation , . . .).



Stratégie « Extraire – regrouper – opérer »

Exemple : *Dans une salle de cinéma, il y a 53 rangées de 6 sièges chacune, 308 personnes attendent pour entrer. Combien restera – t – il de places ?*

1^{ère} étape : **Extraire** les données numériques

53 ; 6 ; 308

2^{ème} étape : **Regrouper** ces données par 2, certaines peuvent être isolées

Critères : les unités associés à ces nombres vont ensemble (même unité, kilo/ prix ; Rangées / sièges, . . .)

(53 ; 6) ; 308

S'il y a plusieurs possibilités l'élève respecte l'ordre d'apparition de ces données.

3^{ème} étape : Choisir les **opérations** à effectuer à l'intérieur des groupes et entre les groupes
Utilisation des deux stratégies précédentes.

*Entre 53 et 6 c'est « x » car « rangées / sièges » ;
Entre le résultat et 308 c'est « - » car « restera »*



Constat : L'élève ne met en place que le chaînage avant.

Origine :

- La rédaction de la solution d'un problème se fait sur la base du chaînage avant.
- La question vient en fin d'énoncé
- L'aide que l'on apporte est généralement faite en s'appuyant (implicitement) sur le chaînage avant.

Pistes d'aide :

Il ne s'agit pas d'amener l'élève à remettre en cause le chaînage avant il faut développer le chaînage arrière, pour cela on peut :

- Aider l'élève en s'appuyant sur le chaînage arrière : « Qu'est – ce qu'on te demande ? Qu'est – ce qu'il faudrait que tu connaisses pour répondre ? . . . »
- A la fin de la résolution d'un problème mettre en évidence l'intérêt du chaînage arrière.
- Donner des problèmes avec des questions en début d'énoncé .

Constat : L'élève bloque (on s'assure bien sûr que le blocage n'est pas dû à l'impossibilité de se construire une représentation de l'énoncé).

Origine :

- L'élève ne dispose pas de stratégie de recherche.

Pistes d'aide :

- Développer le « chaînage avant » : « Qu'est – ce que tu peux déduire de ces informations ? », « Avec ces données que peux – tu calculer ? », « Quelle (s) conséquence(s) tu peux tirer de ces informations? ».

Possibilité de travailler sur des énoncés sans question.

- Développer le « chaînage arrière » : cf. ci – dessus.

- A la fin de la résolution d'un problème faire un « retour méta – cognitif » sur les stratégies : « Pour ceux qui ont réussi comment vous y êtes vous pris pour passer de l'énoncé à la solution ? Pour ceux qui n'y sont pas arrivé, est – ce que vous voyez ce qui est à l'origine de vos difficultés ? Que retenez – vous de la recherche de ce problème ? Conséquence :

Une fois qu'un problème est corrigé ce n'est pas fini !

*Penser à développer d'autres stratégies de recherche, en particulier celle de la démarche scientifique avec **le problème ouvert.***

Élaboration d'une procédure

Constat : La procédure est fautive alors que la représentation de l'énoncé est correcte.

Origine (1) :

- L'élève ne maîtrise pas certains schémas généraux de procédure

Pistes d'aide :

- Aider l'élève à se construire des schémas généraux de procédure.



Origine (2) :

- La surcharge cognitive amène l'élève à s'arrêter avant la fin de la procédure correcte.
- L'élève sait qu'il y a une opération de la procédure (correcte) qu'il envisage de mettre en place mais qu'il ne maîtrise pas.
- L'élève pense que la procédure (correcte) à laquelle il pense est trop simple.

Pistes d'aide :

- Aider l'élève à automatiser certaines procédures.
- Si la difficulté se situe au niveau de certaines techniques opératoires donner aux élèves une calculatrice.



Aider l'élève à se construire des schémas généraux de procédure :

1 - Identifier les types de problèmes associés au schéma général de procédure sur lequel on souhaite travailler

2 - Faire travailler les élèves sur chacun de ces types de problème en commençant par des contextes très familiers de l'élève et en mettant en place la possibilité d'une validation interne.

Laisser vivre les procédures personnelles. C'est en jouant sur les variables de la situation qu'on amènera progressivement les élèves à passer à la procédure experte visée.

Exemple : La multiplication

1 - La typologie de VERGNAUD

2 - Travail sur un type de problème : Par exemple la situation de proportionnalité simple avec présence de l'unité – problème multiplicatif

3 - Choix d'un contexte familier avec validation – interne : On dispose de y paquets de billes qui contiennent chacun x billes. Je vide ces paquets dans cette boîte (opaque). Combien y a – t – il de billes dans la boîte ?

Procédure personnelle : Procédure figurative, additions itérées, . . .

Procédure experte : la multiplication .



Communication du résultat

Constat : L'élève n'arrive pas à communiquer sa procédure en respectant les exigences de l'enseignant.

Origine :

- L'élève ne comprend pas les raisons des exigences de l'enseignant

Pistes d'aide :

- Mettre en place une tâche à erreurs.

Tâche à erreurs

L'enseignant a évidemment énoncé clairement ses exigences concernant la rédaction de la solution d'un problème

- On donne aux élèves un problème à chercher puis on ramasse leurs productions.
- On réalise ensuite un montage d'extraits de réponse à une ou deux questions. Dans chaque extrait, certains éléments ne correspondent pas aux critères annoncés. Par contre les réponses sont mathématiquement correctes.
- L'enseignant photocopie ce montage, le distribue aux élèves et leur demande ensuite, pour chaque extrait, de dire ce qui convient et ce qui ne convient pas. L'enseignant remplit un tableau de ce type avec les réponses des élèves :

Production	Ce qui va	Ce qui ne va pas

- A la fin, il donne son point de vue, lui seul peut trancher. Cela permet aux élèves d'être acteur face aux critères de l'enseignant

5^{ème} temps : Pistes de travail

- En cas d'erreurs d'élève :

- Identifier la procédure mise en place
- Faire un diagnostic pour identifier l'origine de cette procédure (Difficulté au niveau de la représentation de l'énoncé, au niveau de la stratégie, au niveau de la procédure, au niveau de l'exécution, au niveau de la communication du résultat) → mise en place d'un entretien d'explicitation.
- Proposer une aide adaptée à ce diagnostic
- Dans la mesure du possible après la mise en place de l'aide inciter l'élève à dégager ce qu'il retient de l'aide apportée (Retour meta – cognitif).

- En cas de blocage:

- Faire un diagnostic pour identifier l'origine du blocage (Difficulté au niveau de la stratégie, au niveau de la représentation de l'énoncé) → mise en place d'un **entretien d'explicitation**.
- Proposer une aide adaptée à ce diagnostic
- Dans la mesure du possible après la mise en place de l'aide inciter l'élève à dégager ce qu'il retient de l'aide apportée.

Entretien d'explicitation

Objectif : Aider une personne à prendre conscience des procédures qu'elle met en place pour résoudre une tâche et éventuellement de l'origine de cette procédure.

Quelques caractéristiques :

- Cette technique s'utilise "après coup", sur une tâche déjà réalisée.
- Cette technique suppose la mise en place d'un contrat de communication avec l'interviewé : *""ça m'intéresse de savoir comment tu as fait pour résoudre ce problème. Est-ce que tu veux bien que je te pose des questions ? Ça pourrait t'aider aussi à comprendre ce que tu as fait. Es-tu d'accord ?*
- Le questionnement se rapporte toujours à une tâche particulière repérée dans le temps. Pas de question du type : « *Quand tu résous un problème comment t'y prends – tu ?* » mais « *Pour résoudre ce problème comment ... ?* »

➤ La formulation des questions : il faut éviter des questions en "pourquoi" ou les "questions à choix " et les remplacer par des questions qui amènent des connaissances qui ne sont accessibles que par le descriptif en "*Comment ?*", "*Qu'est ce que tu fais ?* "

Cf. P. VERMERSCH - L'entretien d'explicitation Ed. ESF

Bibliographie :

- G. ARSAC, M. MANTE, *Les Pratiques du problème ouvert*, CRDP, 2006.
- J. JULO, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes, 1995.
- « Comment font-ils ?, l'élève et les problèmes de mathématiques », *Rencontres pédagogiques n° 4*, INRP, 1984.
- Equipe ERMEL, *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, INRP, 1999.
- J.-F. RICHARD, *Les Activités mentales*, Armand Colin, 2005.
- L. POIRIER PROULX, *La résolution de problèmes dans l'enseignement*, De Boeck, 1999.
- R. CHARNAY, M. MANTE *Epreuve d'admission de mathématiques CRPE Ed HATIER (à paraître)*.
- « Les problèmes pour chercher » sur le site TFM :<http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/> (rubrique «Ressources»)