Les tout-débuts de l'arithmétique

Michel Fayol (2012). L'acquisition du nombre. QSJ

Michel Fayol
Université Blaise Pascal & CNRS
Agence Nationale de la Recherche
Michel.fayol@univ-bpclermont.fr

Pourquoi la question se pose-t-elle?

Convergence d'arguments

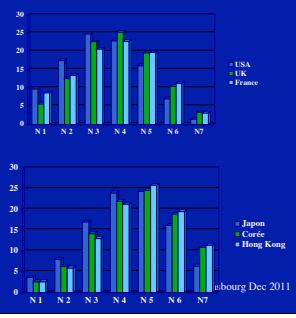
Notre société

- Utilise des outils de comptage abstraits : fiches de banque, cartes de paiement, etc..;
- Procure peu d'occasions de dénombrer : objets achetés pré-emballés (par 6, par 12, etc); argent abstrait (de moins en moins de pièces et de billets);
- Nécessite de moins en moins de manipulations de quantités (caissières dont la machine calcule la monnaie à rendre; chèques complétés automatiquement…);
- Scolariser des activités qui étaient sources d'apprentissage dans la vie quotidienne?

Importantes différences culturelles

Comparaison ASE Occident

Garçons seuls *PISA OCDE 2003*



N1 : < 358

N2 entre 358 et 420

N3 entre 420 et 482

N4 entre 482 et 545

N5 entre 545 et 607

N6 entre 607 et 669

N7 > 669

PISA 2010

- La France: position moyenne, comme l'Allemagne, U.K., etc; mais…
- Les meilleurs: Finlande et Pays d'ASE;
- Deux difficultés qui aggravent la situation en France:
  - Les plus faibles le restent: pas de rattrapage des inégalités malgré l'EM!
  - Pas les meilleurs, contrairement à l'opinion;

Prédire les performances

Pagani et al., 2010

- 1145 enfants suivis de la GSM jusqu'au CE1 (francophones, répliquant une recherche anglophone à Montréal);
- Évaluation en CE1 par les enseignants en Maths, Lecture, attention et comportement; motricité (grossière et fine);
- Évaluation en GSM maths (tests), vocabulaire passif, attention, milieu SC,

Prédire les performances

Pagani et al., 2010

- Déterminer ce qui prédit le mieux les performances académiques en CE1;
- **Les performances en mathématiques sont les meilleures pour prédire tous les domaines académiques** (> .20);
- Suivies par l'attention (> .20 ; capacité de maintenir un contrôle coûteux : noter que l'attention prédit les maths autant que les maths prédisent l'attention);
- Habiletés linguistiques;
- Habiletés motrices fines

Notre école

- Des résultats « moyens » en mathématiques;
- Importance croissante accordée aux différences inter-individuelles;
- Souci d'amener tous les enfants (et les adultes) à un niveau minimal de performance; équité;
- Prise en charge des handicaps, dont les troubles du calcul; problème de leur origine;
- Prise de conscience de l'importance décisive des premières années;

En résumé

- Les mathématiques sont à la fois:
  - Une source de préoccupation;
  - Un déterminant essentiel et précoce de la réussite académique;
  - Un élément important pour la réussite sociale et professionnelle;

La recherche

- L'arithmétique comme mosaïque de dimensions;
- Délimitation de capacités élémentaires diverses; source de différences inter-individuelles et de difficultés spécifiques;
- Recherches longitudinales visant à prédire quelles dimensions précoces influent sur les performances ultérieures à court, moyen ou long terme;
- Comprendre pour intervenir;

Difficultés identifiées

- **Le sens (intuition) du nombre** ou des quantités;
- Difficultés relatives au **dénombrement** des collections;
- Recours à des **procédures** immatures de résolution des **opérations**;

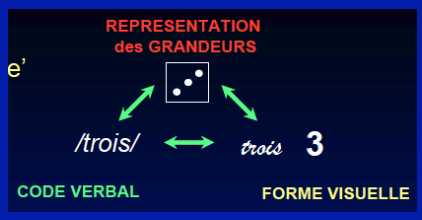
Comment la question se pose-t-elle?

Qu'est-ce que l'arithmétique?

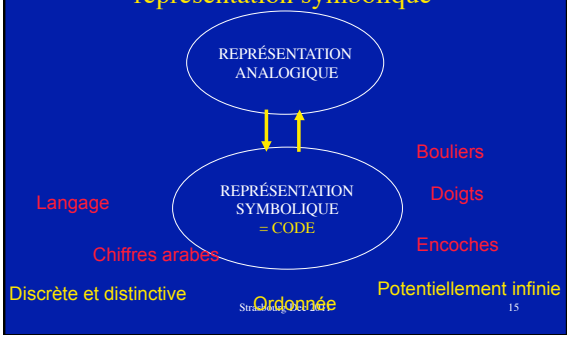
Deux dimensions

- Une dimension analogique, perceptive, très précoce et primitive, biologiquement déterminée, universelle, permettant de traiter les quantités de manière approximative;
- Une dimension symbolique, culturelle, permettant, après apprentissage, de traiter de manière précise les quantités;

Modèle du triple code



De la représentation analogique à la représentation symbolique



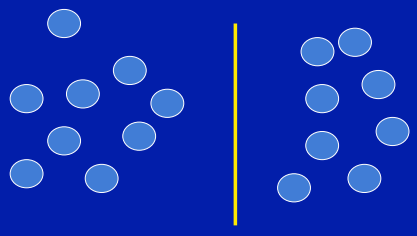
1 Le traitement analogique

Le plus primitif, le plus précoce

Le traitement élémentaire des quantités analogique

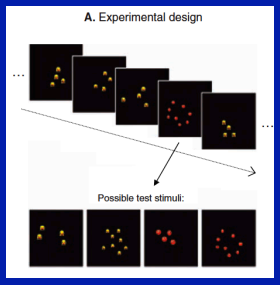
Comparer : quel est le plus grand (petit)? Où y en a-t-il le plus?

La représentation analogique



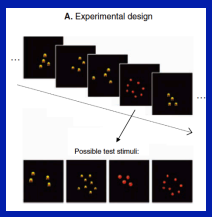
/X1-X2/= 1

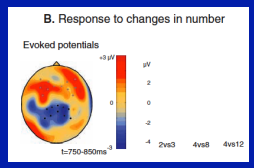
Paradigme d'adaptation



19

Paradigme d'adaptation





20

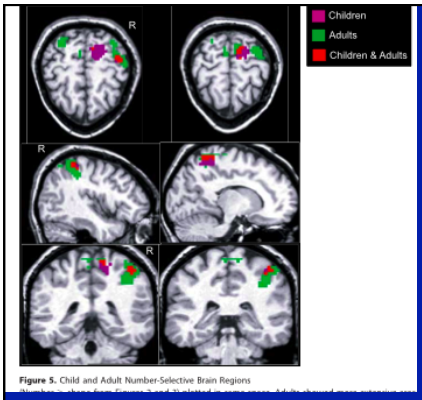
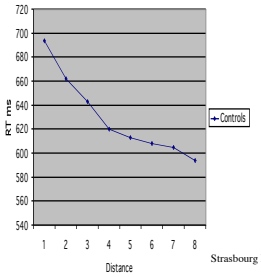


Figure 5. Child and Adult Number-Selective Brain Regions

21

Représentation analogique
Effet de distance



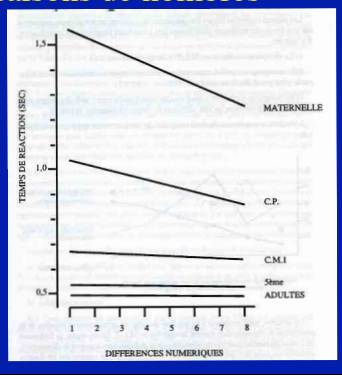
- Quelle que soit la modalité et quel que soit le format de présentation, aux épreuves de comparaison, les erreurs sont d'autant plus rares et les temps d'autant plus rapides que les distances entre items sont importantes. Vrai même quand pas de numération verbale.

Strasbourg Dec 2011

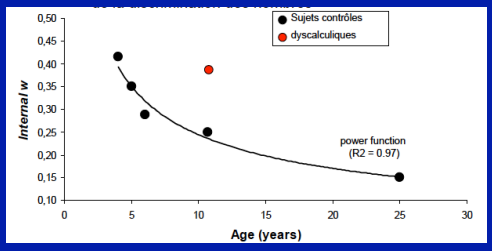
22

Comparaisons de nombres

Dès 5 ans l'effet de distance apparaît dans les comparaisons de quantités présentées sous forme de code symbolique
Sekuler & Mierkiewick, 1977



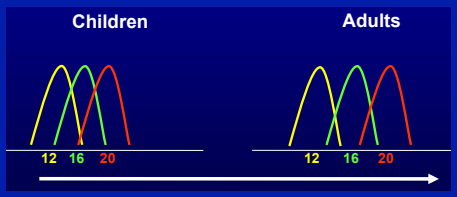
Variabilité de la fraction de Weber
(estimation de la précision des discriminations)



Orthopi 11 2012 *Piazza et al.*

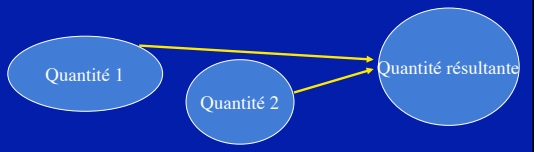
24

Une interprétation



La représentation des quantités serait plus floue (bruitée) chez les enfants que chez les adultes

Le traitement élémentaire des quantités analogique



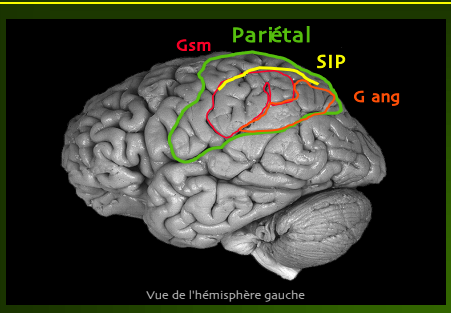
Transformation analogique: ajouter, réunir, enlever, dissocier, partager

Pas d'opération. Simple perception de la taille relative des quantités, continues ou discrètes.

Trois difficultés potentielles

- La représentation analogique : est-elle variable entre individus? Peut-elle être affectée?
- L'apprentissage des codes et leur usage: peuvent-ils donner lieu à des difficultés spécifiques?
- La relation entre représentation analogique et représentation(s) symboliques: quelles difficultés?

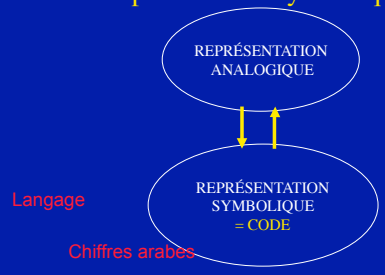
Introduction: Un "organe" numérique?



2 Le traitement symbolique

Une diversité de systèmes dont l'apprentissage et l'efficience varient

De la représentation analogique à la représentation symbolique



Langage

Chiffres arabes

Bouliers

Doigts

Encoches

Discrète et distinctive

Ordonnée

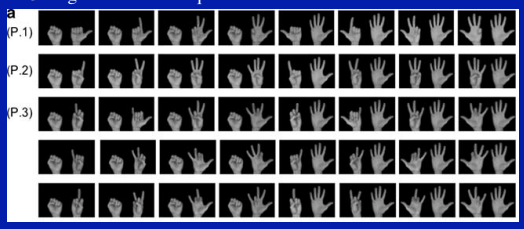
Potentiellement infinie

L'importance des codes

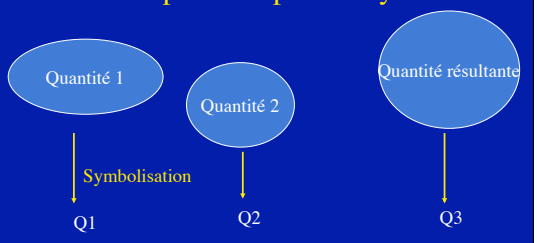
- Essayez de résoudre:
- XXXIV x XXIII
- CXXIX - XXXVIII
- Ce ne sont pas les quantités qui posent problème, mais leur codage et la manipulation de celui-ci;
- Source principale de difficulté: le code; sa vitesse d'accès (dans les 2 sens); sa manipulation;

Configurations canoniques ou non

Montrer n ; puis dénombrer n en fonction des configurations.
Configurations canoniques en mémoire.

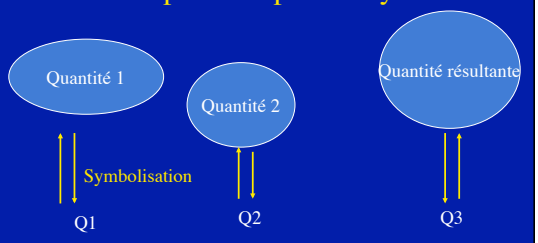


Discrétiser par l'emploi de symboles



Attention : les mots ne sont qu'une possibilité parmi d'autres

Discrétiser par l'emploi de symboles



Le problème est celui de la mise en correspondance entre représentation analogique et représentation symbolique. Deux questions : l'appariement; la vitesse.

Qu'est-ce que l'arithmétique?

- Traiter les quantités perceptivement; estimer, comparer; traitement analogique des quantités, approximatif:
  - Continues : longueurs, surfaces, intensités sonores, odeurs, …
  - Discontinues : billes, jetons, automobiles, étoiles, fourmis, électrons…
- Traiter les quantités symboliquement; par le biais de systèmes de symboles qui « tiennent lieu » des quantités; précis;
  - Dénombrer, calculer, comparer…

Le passage au symbolique

Lent et difficile

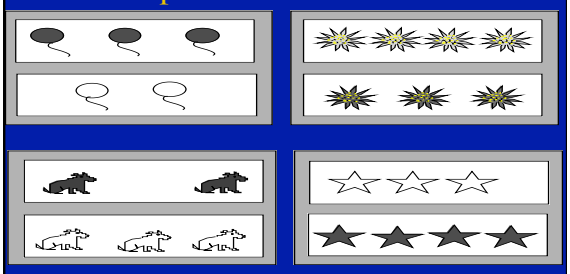
2.1 Les tout-débuts et la dimension verbale

Des débuts difficiles

TYPES DE TACHES	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6
-Reproduire un nombre donné d'objets	1	-	3	-	-	4	-	-
-Montrer autant de doigts que d'objets	-	1-2	-	3	-	4	-	-
-Montrer autant d'objets que de doigts	-	1-2	-	-	3	4	-	-
-Imiter un nombre de coups frappés	-	-	1	-	2	-	3	-
-Dire combien on a entendu de coups	-	-	-	-	1-2	3	-	4
-Dire combien d'objets sans compter	1	2	-	-	3	-	-	4
-Donner un certain nombre d'objets à 1, 2,3 personnes	1	2	-	-	3	-	-	4 à 10
-Répéter la suite des nombres	1 à 4	1 à 5	1 à 6	-	1à 7-8	1 à 10	-	-
-Dénombrement avec les doigts	-	-	-	-	2 à 6	7 à 10	-	-

Descœudres, 1921

Les difficultés d´ acquisition de la représentation verbale



Les enfants de 2 1/2 réussissent le choix de « un » contre une autre quantité. Il leur faut un an de plus pour réussir deux contre trois ou quatre.

Quid de la compréhension de l'ordre comme codage de la quantité?

- Les enfants de 3 ans savent que différents mots de la liste des noms de nombres s'appliquent à différentes collections d'objets; mais ils ne savent pas lesquels;
- Le fait d'énoncer le nom de nombre dans l'ordre ne suffit pas pour assurer la compréhension de l'association avec la plus grande ou la plus petite des deux collections: les enfants ne comprennent pas que le plus « loin » dans la liste est le plus grand; .

Connaissance verbale et traitement des quantités

Quelle boîte contient le plus de poissons?

"un" vs. "huit" "deux" vs. "trois"

"six" vs. "dix" "huit" vs. "dix"

2.2. Le code verbal

D'importantes difficultés

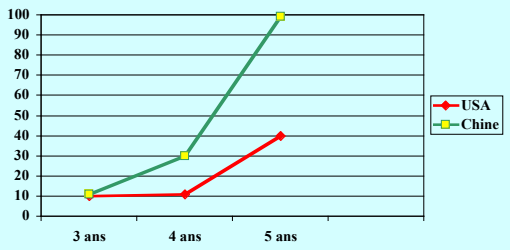
Caractéristiques de la représentation verbale

- Pas présente partout: Piraha et Munduruku ; un, deux, trois?
- Lexique : un, deux, six, douze, vingt, cent, mille
- Bases: dix, vingt, soixante
- Combinatoire: -> syntaxe traduisant des combinaisons « Additives » (trente six) ou « Multiplicatives » (quatre vingt ; trois cents)
- Problèmes de régularité : mémorisation du lexique ; acquisition et mise en œuvre de la syntaxe

Caractéristiques de la représentation verbale Comparaison anglais, chinois, français

	Français	Anglais	Chinois
1	un, une	one	yi
2	deux	two	er
3	trois	three	san
10	dix	ten	shi
11	onze	eleven	shi yi
12	douze	twelve	shi er
13	treize	thirteen	shi san
20	vingt	twenty	er shi
21	vingt et un	twenty-one	er shi yi
22	vingt-deux	twenty-two	er shi er
23	vingt-trois	twenty-three	er shi san

Impact des caractéristiques verbales sur l'acquisition de la numération verbale Comparaison anglais chinois



Situation critique en français

Quinze, seize, dix-sept…

Vingt;

Trente, quarante, …soixante;

Soixante, soixante dix, quatre-vingts…

Grande irrégularité qui ralentit et fragilise l'apprentissage

2.3. Le dénombrement

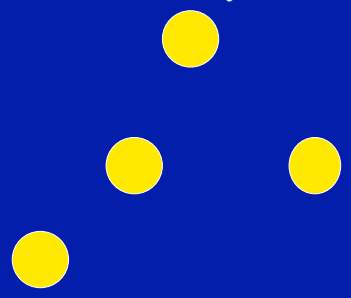
Une activité à plusieurs composantes

Le dénombrement

- Coordination de la mise en œuvre de **deux composantes** :
  - Composante **motrice** (pointage, mouvements des yeux, etc);
  - Composante **symbolique** (noms de nombres, chiffres arabes, formes signées);
  - Possible coût de cette **coordination**, qui s'ajouterait aux coûts de chacune des deux composantes;
  - Quel impact chez les enfants TSL ou dyspraxiques?

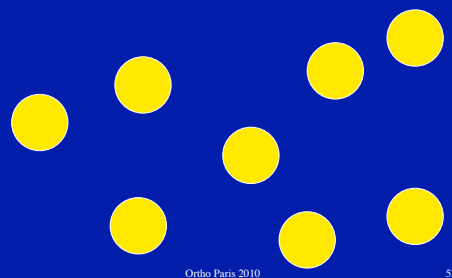
Combien y en a-t-il?

Combien y en a-t-il?

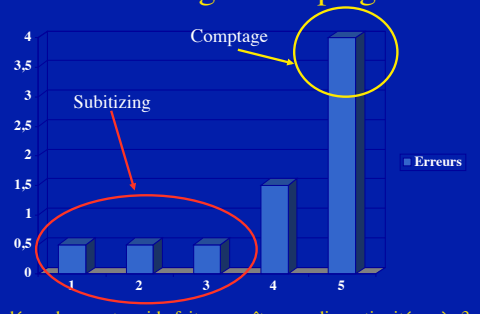


Combien y en a-t-il?

Combien y en a-t-il?



Subitizing et comptage



Le dénombrement rapide fait apparaître une discontinuité après 3

Subitizing et comptage

- **Subitizing** : estimation rapide et précise de petites quantités (1 à 3 voire 4); en un coup d'œil (focus attentionnel);
- **Dénombrement** : opération complexe impliquant le langage et la mise en correspondance terme à terme de mots et d'entités dénombrées;

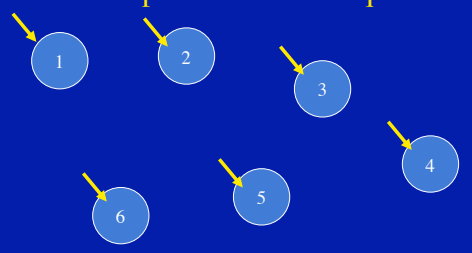
Le dénombrement par comptage

- Censé reposer sur quelques principes très précoces (innés?) dont la mise en œuvre peut poser longtemps problème;
- Pourtant certains principes semblent moins faciles que d'autres : la cardinalité associée au dernier mot prononcé; la non pertinence de l'ordre (non ou peu acquis par les individus présentant des troubles du calcul);

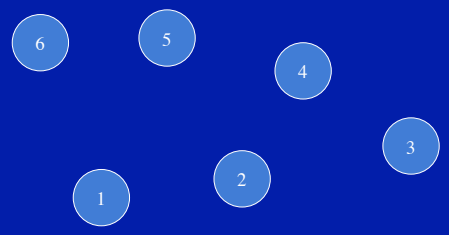
Le dénombrement

- Mise en œuvre d'une procédure respectant des **principes**:
  - Stricte correspondance terme à terme entre désignation des éléments et items servant à les désigner;
  - Ordre stable des éléments servant à désigner;
  - Dernier élément fournit la cardinalité;
  - Abstraction: aucun impact de l'homogénéité ou de l'hétérogénéité;
  - Non pertinence de l'ordre du traitement.

Dénombrer
La procédure canonique

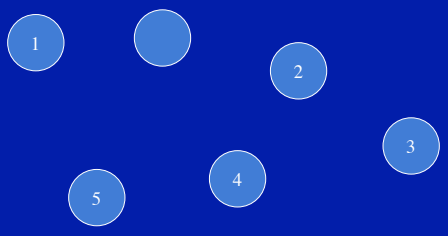


Dénombrer
Commencer par la fin?



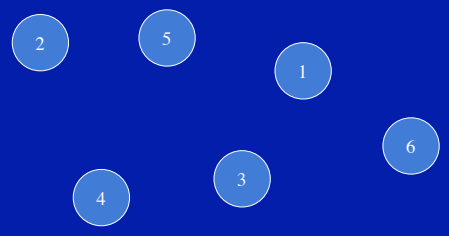
Parviendra-t-on au même résultat?

Dénombrer
Oublier des mots…ou des pointages



Parviendra-t-on au même résultat?

Dénombrer
Ordre aléatoire



Parviendra-t-on au même résultat?

Le dénombrement par comptage

- Censé reposer sur quelques principes très précoces (innés?) dont la mise en œuvre peut poser longtemps problème;
- Pourtant certains principes semblent moins faciles que d'autres : la cardinalité associée au dernier mot prononcé; la non pertinence de l'ordre (non ou peu acquis par les individus présentant des troubles du calcul);

Pourcentages de réussite aux épreuves testant les principes de comptage

Enfants de fin de GSM 70 mois

Principes	Pourcentages
Ordre stable (OS)	62.4
Correspondance T à T (CTT)	95.3
Cardinalité C	65.7
OS+CTT	59.1
OS+C	43.3
CTT+C	65.7
Les trois	44.2

Difficultés affectant le dénombrement

- Méconnaissances des principes du dénombrement;
- Beaucoup d'erreurs et durées longues;
- Instabilité des performances;
- Principe de cardinalité;

Suggestions

- Enseigner explicitement les principes du dénombrement;
- Inciter à la planification et au contrôle du dénombrement;
- Isoler des blocs d'éléments;

Bilan

- Les difficultés majeures, d'apprentissage comme d'utilisation, semblent venir en premier lieu de la relation entre le code et les quantités, dans les deux sens: de la quantité vers le code (dénombrement) ; du code vers la quantité (évocation);
- Le jeu induit une amélioration des performances sur la ligne numérique (qui se linéarise) mais aussi aux épreuves de comparaison et aux opérations simples: structuration de la ligne numérique mentale;
- S'interroger sur la pertinence des codes en fonction de l'âge: le code verbal pourrait être le plus difficile à apprendre; attention aux difficultés praxiques et langagières;

2.3. L'apprentissage du code indo-arabe et le transcodage

Un apprentissage explicite?

La représentation indo-arabe

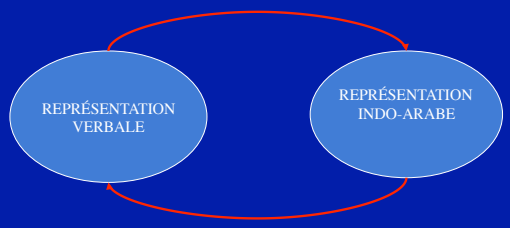
- Base 10;
- Lexique restreint : 0 à 9;
- Notation positionnelle de la puissance;
- Dissociable de la représentation verbale et de la représentation analogique;
- Active directement (sans transiter par la représentation verbale) la représentation analogique (effets de distance, de taille, etc)

Un problème de code

Fischer 2011

1 (40 %)	**2** (43 %)	**3** (62 %)	**4** (11 %)	**5** (14 %)	**6** (15 %)	**7** (41 %)	**9** (41 %)
Ery. (5 ; 8)	Ang. (6 ; 3)	Cel. (5 ; 6)	Yon. (5 ; 4)	Tha. (6 ; 0)	Jul. (5 ; 8)	Emi. (5 ; 8)	Meh. (5 ; 5)
B (4 %)	**C** (8 %)	**D** (5 %)	**E** (5 %)	**F** (8 %)	**G** (7 %)	**J** (45 %)	**K** (4 %)
Mil. (5 ; 5)	Mat. (6 ; 4)	Eva. (5 ; 8)	Ine. (6 ; 2)	Naw. (5 ; 5)	Ray. (5 ; 5)	Elm. (6 ; 3)	Sof. (5 ; 4)
L (12 %)	**N** (3 %)	**P** (9 %)	**Q** (9 %)	**R** (6 %)	**S** (18 %)	**Z** (49 %)	
Gab. (5 ; 6)	Dor. (5 ; 6)	Ale. (5 ; 6)	Yan. (6 ; 1)	Els. (5 ; 2)	Mar. (5 ; 8)	Lis. (5 ; 9)	

Représentation verbale et représentation indo-arabe



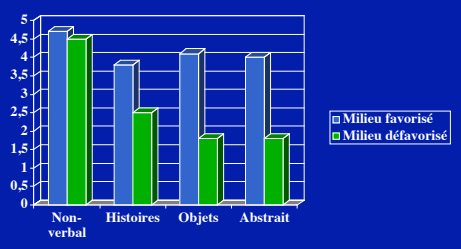
Impact de la représentation verbale sur le transcodage

- Erreurs initiales de transcodage;
- Comparaison Wallon/Français :Ecriture sous dictée en Deuxième primaire (Quatre vingt deux -> 4202 OU 802; Soixante douze -> 6012; Quatre vingt dix sept -> 42017 *(Seron & Fayol, 1994);*
- Erreurs de même type chez des patients;
- Possible transcodage asémantique du verbal vers l' indo-arabe *(Seron, Deloche & Noël, 1992)*

Apprentissage et utilisation des codes

- Des difficultés inhérentes à chaque code : forme, prononciations, confusions, etc.; rein à voir avec les sens;
- Des difficultés d'associations entre code et sa signification : dans les deux sens; importance de l'exercice et des contextes;
- Nombreuses activités; ludiques?

Comparaison verbal et non-verbal



Conclusion

L'acquisition et l'utilisation des codes

En résumé

- L'acquisition des systèmes symboliques soulève des problèmes propres, dépendant des caractéristiques de ces systèmes;
- Ces difficultés ne doivent pas être confondues avec le traitement des quantités, qui peut être travaillé pour lui-même; sans verbalisation, ou après-coup;
- La mise en relation entre traitement des quantités et systèmes symboliques est longue, difficile et peu perçue par les enseignants (et les parents);
- Le fait d'opérer sur des symboles et de trouver des résultats empiriquement exacts constitue une conquête difficile; conditionne la compréhension des maths?
- Attention aux retards et aux obstacles; prédictivité;

Merci pour votre attention
Pour en savoir plus:
Michel Fayol (2012). L'acquisition du nombre. PUF - Collection QSJ

Michel.fayol@univ-bpclermont.fr